L'infini des philosophes et des mathématiciens.

Bahram Houchmandzadeh

CNRS & Université Joseph Fourier, Grenoble I

1 Introduction.

1.1 Le problème des philosophes.

Le concept de l'infini intervient très naturellement, dès que nous avons la notion du "plus grand" et du "plus petit" : Est ce qu'il y a quelqu'un de plus fort que mon papa ? et plus fort que lui ? et plus fort que ce dernier ? Cette question a plus ou moins orienté la pensée humaine vers un être qui est le plus fort de tous les êtres vivants et qu'on a désigné par dieu. Une autre rencontre naturelle avec l'infini intervient également pendant l'enfance, quand on apprend à dénombrer les chiffres et les quantités très grandes : dix, cent, mille. Et puis des mots magiques et vraiment grands : *millions.* Et encore plus grand et magique, presque imbattable : *milliard.* Mais finalement on apprend qu'on peut toujours construire un nombre encore plus grand par un ensemble de règles très simples : mille milliard, mille milliard de million, ... Le jeu, même dans la logique de notre enfance, paraît sans fin. A la question "mais alors, est-ce qu'il y a un chiffre qui est plus grand que tous les autres" on s'entend répondre, selon les cas, (i) non (ii) oui et son nom est "infini". On peut même aller jusqu'à nous exhiber le signe kabalistique qui désigne une telle majesté : ∞ !

Cette notion paraît tellement fascinante qu'elle a attiré l'attention des philosophes depuis que l'on note la pensée humaine. Pour les théologiens, elle a joué un rôle fondamental au fur et à mesure que le concept de dieu s'est détaché des choses d'ici bas et est devenu abstrait. Le dieu ne pouvait être qu'infini *et* unique. Le principe d'unicité s'est imposé au fur et à mesure comme une conclusion logique de l'infinité : si il y avait plusieurs dieux infinis, alors aucun ne pourra être plus fort que les autres. Or, ce qu'on exigeait d'un dieu respectable était qu'il soit plus fort que *tous* les autres êtres.

Mais il n'a pas fallu longtemps pour que les philosophes réalisent que cette infinitude n'allait pas sans problèmes. Deux problèmes majeurs se posaient à dieu l'infini que je vais appeler sa divisibilité et son "self-référençage".

Divisibilité : Supposons que je divise en deux un dieu infini, alors est ce que chaque morceau est infini ou fini ? Les deux réponses sont insatisfaisantes. D'abord, il paraît évident que les deux morceaux ne peuvent pas être finis, puisqu'ajouter deux objets finis ne peut donner qu'un objet fini. Mais ensuite, si les deux morceaux sont infinis, alors un objet peut il être aussi grand que sa moitié ? Cela paraît également absurde. Cette dernière conclusion a cependant donné lieu à un mouvement mystique au 8ème siécle chez les musulmans : bien sûr, nous sommes tous des parties d'un dieu, et tous égaux à lui dans son infinitude (qui en plus n'est qu'amour, mais çela est une autre histoire). En fait, le dieu n'est que nous. L'avocat le plus célèbre de cette thèse était Hallaj, pendu pour son hérésie et qui n'a pas cessé de clamer "Anal' Haq", je suis dieu, au moment de son exécution. Le mouvement n'est bien sûr pas mort avec Hallaj et les mystiques de cette tendance (toujours très bien représentés de nos jours) ont produit quelques unes des plus belles oeuvres de poèsie qui ne laissent pas insensible le plus rigoriste des athées.

Self-référençage : Les philosophes se sont vite rendus compte d'une contradiction encore plus profonde de l'infinitude. En langage de la cour de récréation : "Si dieu est tout puissant, est ce qu'il peut créer une pierre si lourde qu'il ne puisse pas la soulever lui même ?". A nouveau, dans les deux cas, la réponse est insatisfaisante. Si il n'est pas capable de créer une telle pierre, il n'est donc pas tout puissant et infini. Mais si il le peut, alors à nouveau, il n'est pas tout puissant, puisqu'il ne peut pas la soulever.

Ces deux types de contradiction ont opposé deux écoles de pensée. Dans la première, où on trouve des logiciens tel que Farabi (mort en 950 AC) et Avicenne (plus connu en Occident pour ses travaux de médecine), les philosophes ont argumenté que l'infini *ne peut pas* exister. Avicenne, menacé d'hérésie, a du s'exiler à Ispahan (1023 AC) où la reine était plus tolérante. Ses commentaires sur l'oeuvre d'Aristote ont été repris par Thomas d'Aquin.

La deuxième école, où on trouve des philosophes tels que Ghazali (mort en 1111 AC) et des poètes mystiques tels que Hafiz (mort en 1390 AC), rejette l'application de la logique aristotélicienne, élaboré par des êtres finis, aux êtres infinis. Pour les mystiques souffis, il fallait même aller plus loin : ce n'est qu'en se débarassant de la logique que l'on peut approcher, appréhender et rejoindre dieu. Evidemment, le vin, servi de préférence par de beaux/belles serviteurs pouvait aider une telle démarche et c'est pourquoi ce liquide joue un si grand rôle dans la littérature persane.

1.2 Les mathématiciens prennent le relai.

Au fur et à mesure que la pensée humaine a progressé et élaboré des outils formels performants, les philosophes ont laissé la place aux scientifiques. C'est aini que les alchimistes sont devenus chimistes et ceux qui,comme Zenon et MollaSadra, réfléchissaient au mouvement se sont effacés au profit des physiciens tels que Newton, Euler et Lagrange. La science la plus ancienne est la mathématique, mais curieusement, ce n'est qu'à la fin du XIXème siècle que les mathématiciens ont attaqué de front le concept de l'infini. Bien sûr, ils se sont alors heurtés aux mêmes problèmes que les philosophes. Le premier type de problèmes a été traité par Georg Cantor en établissant une hiérarchie entre les infinis et en créant la théorie des ensembles. Mais cette théorie, comme l'a très rapidement remarqué Bertrand Russel, souffrait des problèmes graves de self-référençage (nous reviendrons sur l'ensemble de tous les ensembles plus tard). En 1901, Hilbert a proposé ses vingts problèmes, une sorte de programme pour les mathématiques à venir. Un des problèmes était de guérir les mathématiques de ses problèmes de self-référençage. En 1930, Gödel a démontré que ce mal était inguérissable et que les mathématiques souffriraient à jamais d'incomplétude. En essayant d'approfondir le théroème de Gödel, Alan Turing a construit une machine formelle qui est le cadre théorique des ordinateurs actuels.

Ce sont les travaux de ces quelques personnes que nous allons surtout exposer par la suite. Les problèmes avec l'infini cependant n'arrivent pas qu'aux disciplines abstraites et parfois nous les rencontrons pour la compréhension de notre monde courant. Par exemple, l'atome d'hydrogène (et tous les autres, du coup) n'est pas stable si on considère que la taille de l'univers est infini. Un autre exemple est celui de l'interaction d'une charge électrique avec son propre rayonnement, qui a nouveau, résulte dans la manipulation de quantités infinies. Le premier problème est lié à la différence entre l'infini des nombres entiers et celui des nombres réels, que nous verrons plus bas. Pour résoudre le deuxième problème, les physiciens, depuis Feyman en 1948, ont élaboré des méthodes cabalistiques pour retrancher les infinis entre eux et en extraire des quantités finies. Nous repoussons la discussion de l'infini des physiciens à un appendice à la fin de ce texte.

2 Georg Cantor et la hierarchie des infinis.

Cantor (1845-1918) est un des ces immenses mathématiciens dont l'oeuvre a bouleversé profondément les mathématiques. La nouveauté de ses travaux a attiré de nombreuses inimitiés qui ont ralenti sa carrière : ainsi, à cause de l'anthipathie de Kronecker[1], il a du se contenter d'un poste de professeur à l'université de Hall, et sa candidature à la prestigieuse université de Berlin n'a jamais été acceptée. La fin de sa vie est marquée par de nombreux séjours dans des hopitaux psychiatriques.

Cantor est le créateur de la théorie des ensembles et c'est ainsi qu'il a réussi à affronter de façon rigoureuse les nombres infinis, qu'il appela *transfinis*. La théorie des ensembles est de nos jours enseignée à l'école et nous supposons le lecteur familier avec les notions de base de cette théorie. Ainsi, l'ensemble $A = \{pomme, orange, citron\}$ contient trois éléments. Nous disons par exemple que pomme appartient à A et on note $pomme \in A$. L'ensemble $B = \{pomme, orange\}$ est un sous ensemble de A, puisque chaque élément appartenant à B appartient à A également.

Le nombre d'éléments que contient un ensemble est appelé son cardinal. Dans les exemples ci-dessus, $card(A) = 3$ et $card(B) = 2$. Il n'est pas très difficile ici de dire que l'ensemble A est "plus grand" que l'ensemble B. Mais comme nous allons aborder des ensembles infinis, il nous faut une définition plus rigoureuse.

2.1 comparaison de la "taille" de deux ensembles.

Soit deux ensembles A et B. Si à chaque élément de A, nous pouvons associer *de façon unique*, un élément de l'ensemble B, alors $card(A) \leq card(B)$ (voir figure 1.a). Si par ailleurs, on peut démontrer (de la même manière) que $card(B) \leq card(A)$, alors les deux ensembles ont la même "taille". Nous disons qu'ils sont équivalents[2], ce que nous notons par $A \equiv B$. Si par ailleurs, on peut démontrer *qu'on ne peut pas* associer, de façon unique, à chaque élément de B un élément de A, alors A est vraiment "plus petit" que B : $card(A) < card(B)$.

Il va de soi que si A est un sous ensemble strict de B, alors il ne peut pas être plus "grand" que ce dernier : si $(A \subset B)$ alors $card(A) \leq card(B)$ (exercice : le démontrer). Vous voyez que nous avons évité d'écrire que le cardinal de A est *strictement plus petit* que B, même si cela nous paraît tout à fait naturel. Là est *la clef* de la l'infini. En fait, Cantor a pris comme *definition* d'un ensemble infini ce qui paraissait être la première contradiction (celle sur la divisibilité, si vous vous souvenez) :

> Un ensemble est infini si il est équivalent à un de ses sous ensembles strict.

Voilà que d'un seul coup, une des contradictions majeures de l'infini disparaissait. Un des premiers travaux de Cantor a été de montrer que cette définition ne mènait à aucune contradiction. De plus, cela permettait de définir l'algèbre des nombres transfinis (comment les additionner, multiplier, etc.), que nous allons voir de plus près.

---

[1] "Dieu inventa les nombres entiers ; tout le reste est invention humaine" est une citation très connu de Kronecker. Et résume parfaitement sa position (et son inimité) envers Cantor.

[2] On évite le terme "égal" : les deux ensembles $\{pomme, orange, citron\}$ et $\{citron, orange, pomme\}$ sont égaux (et équivalent), mais les deux ensembles $\{pomme, orange, citron\}$ et $\{3, 17, 57000\}$ne sont qu'équivalent.

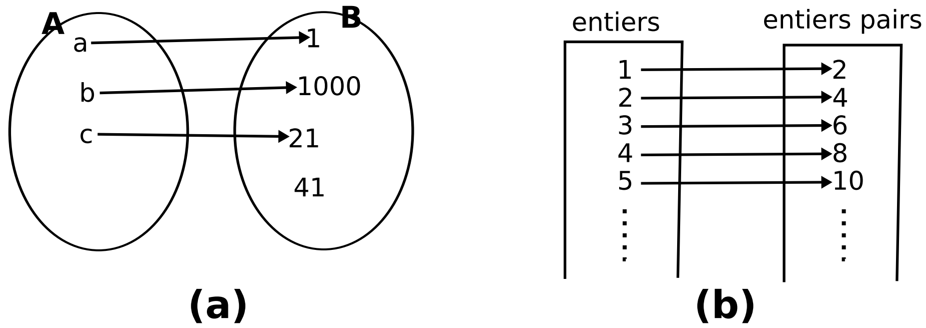

FIG. 1: Comparaison de la “taille” de deux ensembles. (a) A chaque élément de l'ensemble A, nous avons réussi d'associer de façon unique un élément de l'ensemble B. Donc, $card(A) \leq card(B)$. (b) comparaison de l'ensemble des nombres entiers $\mathbb{N}$ et l'ensemble des nombres entiers pairs $2\mathbb{N}$. A chaque élément du premier nous pouvons associer de façon unique un élément du second, donc $card(\mathbb{N}) \leq card(2\mathbb{N})$.

2.2 L'infini des nombres entiers.

L'ensemble des nombres entiers $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,...\}$ est le premier (et le plus petit) des ensembles infinis que l'on rencontre. Regardons maintenant l'ensemble des nombres pairs $2\mathbb{N} = \{2,4,6,8,...\}$. Il est évident que $2\mathbb{N}$ est un sous ensemble de $\mathbb{N}$, et donc $card(2\mathbb{N}) \leq card(\mathbb{N})$. D'autre part, on peut, à chaque élément n de l'ensemble des entiers, associer un nombre unique $2n$ de l'ensemble des nombres pairs (voir figure 1.b). Donc, $card(\mathbb{N}) \leq card(2\mathbb{N})$, ce qui implique alors que $card(\mathbb{N}) = card(2\mathbb{N})$. L'ensemble des nombres entiers est équivalent à un des sous ensembles stricts et il est donc inifini. Le cardinal de cet ensemble qui est un nombre transfini est noté $\aleph_0$ (aleph 0 ; aleph est le premier caractère de l'alphabet hebreu et arabe). Ce nombre est plus grand que tous les nombres naturels : $n < \aleph_0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice : (i) démontrer que l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ est équivalent à $\mathbb{N}$; (ii) démontrer de même que l'ensemble des points sur une ligne (infinie) est équivalent à l'ensemble des points sur un cercle, autrement dit, que l'ensemble des nombres réels est équivalent à l'ensemble des nombres réels entre 0 et 1 : $\mathbb{R} \equiv [0,1]$.

Essayons maintenant de voir la règle d'addition pour les nombres transfinis. Si deux ensembles A et B sont finis et disjoints (c'est à dire qu'ils n'ont pas d'éléments en commun), leur union est plus grande que chacun de ces ensembles. Plus exactement, $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$. Or, il n'y a aucune raison que cette règle ne s'applique qu'à des ensembles finis. Par exemple, l'ensemble des nombres entiers est l'union de l'ensemble des nombres pairs et impairs (tous deux de cardinal $\aleph_0$), nous voyons donc que nous avons $\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0$. Si vous vous souvenez de la définition de multiplication, vous voyez que nous pouvons réecrire la relation ci-dessus comme $\aleph_0 = 2\aleph_0$

Nous pouvons diviser chacun des ensembles pairs et impairs en d'autres sous ensembles infinis, et étendre ainsi notre règle d'addition : $\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 = 4\aleph_0$. Par exemple, l'ensemble des nombres entiers et l'union des nombres du genre $4n$, $4n+1$, $4n+2$ et $4n+3$. Et comme il n'y a aucune raison que l'on s'arrête à quatre, nous pouvons écrire, de façon générale,

$$\aleph_0 = n\aleph_0\ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

On peut multiplier $\aleph_0$ par n'importe quel nombre naturel, on obtient toujours $\aleph_0$. Mais nous avons ouvert la boite de Pandore : et si on multipliait $\aleph_0$ par lui même ? Quelle est la relation entre ce nombre et son carré $\aleph_0^2$?

	1	2	3	4	5	6	7	8 ...
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5 ...			
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5 ...			
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5 ...			
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5 ...			
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5 ...			
6	....							
7	....							
8								

FIG. 2: L'énumération des nombres rationnels : on parcours les nombres rationnels contenu dans ce tableau selon la ligne rouge. Chaque nombre rationnel sera rencontré au bout d'un nombre d'étape unique. On associe ce nombre d'étape au nombre rationnel. Nous avons ainsi énuméré les nombres rationnels.

2.3 L'infini des nombres rationnels.

Est ce qu'il existe un ensemble "plus grand" que $\mathbb{N}$? L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels du genre p/q (3/4, 27/9, ...) est un bon candidat : entre 0 et 1, là ou il n' y a que deux nombres naturels, il existe une infinité de nombres rationnels[3]. Si l'on y refléchit bien, l'ensemble $\mathbb{Q}$ est formé de couple (p,q) où $p,q \in \mathbb{N}$. C'est simplement une convention que de noter les nombres rationnels par p/q plutot que par (p,q).

Nous pouvons, à l'exemple de ce que nous avons fait pour l'addition, énoncer une règle de multiplication. Soit deux ensembles A et B, et considérons l'ensemble C de tous les couples que l'on peut former en prenant un élément de A et un élément de B : $C = \{(a,b)\}\ a \in A\ b \in B$. Nous appelons C le produit cartésien d'A et B : $C = A \times B$. La relation entre les cardinaux est $card(A \times B) = card(A).card(B)$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier cela sur quelques petits exemples.

Pour illustrer cela plus précisement, considérons l'ensemble $\mathbb{P}$, le produit de l'ensemble $\{0,1\}$ par l'ensemble de nombres pairs $2\mathbb{N}$. C'est un ensemble formé de couples du genre $(s,2n)$ où s peut être 0 ou 1 et n n'importe quel nombre naturel. Si nous identifions le couple $(s,2n)$ au nombre $(s+2n)$, nous voyons alors que $\mathbb{P}$ n'est rien d'autre que l'ensemble des entiers dans sa totalité. En y appliquant la relation de multiplication, nous obtenons

$$\aleph_0 = card(\mathbb{N}) = card(\mathbb{P}) = card(\{0,1\} \times 2\mathbb{N}\} = 2\aleph_0$$

Bon, nous n'avons gagné rien d'autre qu'une relation que nous connaissions déjà. Mais cette règle de multiplication va nous permettre de quantifier $\aleph_0^2$.

Considérons le tableau de la figure 2 : la première ligne et la première colonne sont formées des nombres entiers ; le tableau lui même est formé des couples (p,q) et représente l'ensemble des nombres rationnels. Parcourons maintenant le tableau selon la ligne rouge en commençant par $1/1$. Chaque nombre rationnel sera rencontré au bout d'un certain nombre d'étape. Par exemple, $1/2$ est

[3]Petite précision : $2/4$, $1/2$ et $3/6$ représentent le *même* nombre rationnel. L'ensemble que nous avons défini plus haut, formé de couple (p,q) *contient* l'ensemble des nombres rationnels. On "réduit" ce dernier à l'ensemble des nombres rationnels via une classe d'équivalence, en casant les nombres (p,q) et (p',q') dans le même groupe si $pq' = p'q$. Nous ne rentrons pas ici dans ce genre de détails.

rencontré au bout d'une étape et $1/5$ après 14 étapes. Ainsi, chaque nombre p/q est rencontré de façon unique après $f(p,q)$ étapes (exercice : donner l'expression de f). Vous voyez que nous avons ainsi énuméré l'ensemble des nombres rationnels, puisqu'à chaque nombre rationnel p/q, nous pouvons associer de façon unique un nombre entier $f(p,q)$. Nous en déduisons que $card(\mathbb{Q}) \leq card(\mathbb{N})$. Comme la démonstration dans l'autre sens ne pose pas de problème, nous en déduisons que $\mathbb{Q} \equiv \mathbb{N}$! Le résultat paraît à priori déroutant : il n'y a pas plus d'éléments dans l'ensemble des nombres rationnels que dans l'ensemble des nombres entiers (exercice : démontrer l'équivalence entre les nombres réels et les nombres complexes, c'est à dire $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}$) : De plus, d'après ce que nous avons dit sur le produit cartesien des ensembles, $card(\mathbb{Q}) = card(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, ce qui implique :

$$\aleph_0^2 = \aleph_0$$

Bien sûr, nous pouvons généraliser cette règle et obtenir $\aleph_0^n = \aleph_0$.

Bon, arrivé à ce niveau, nous pouvons avoir l'impression que finalement, du moment qu'on est infini, il n'y a pas plus grand. Cette impression peut encore se renforcer en considérant l'ensemble des nombres algébriques $\mathbb{A}$. Nous savons que l'ensemble $\mathbb{Q}$ est riche, mais des nombres aussi courant que $\sqrt{2}$ n'y appartiennent pas[4]. L'ensemble $\mathbb{A}$ justement enrichi $\mathbb{Q}$ par tous ces nombres. Plus exactement, c'est l'ensemble des racines de toutes les équations polynomiales à coefficients entiers, c'est à dire les racines des équations du genre $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...a_0 = 0$ où les a_i sont entiers. Par exemple, $\sqrt{2}$ est la solution de $x^2 - 2 = 0$. L'ensemble des nombres rationnels est bien sûr inclu dans les nombres algébriques, puisqu'un nombre rationnel p/q est solution de $qx - p = 0$. Jusqu'à la fin du XIXème siècle, on croyait que cet ensemble était pratiquement égal à l'ensemble des nombres réels. On avait démontré avec beaucoup de peine que les nombres e et π ne sont pas algébriques (on les appelait transcendants), mais on croyait que ce n'étaient que des rares exeptions. Le coup de maître de Cantor a été de démontrer que même $\mathbb{A}$ était denombrable. Nous avons repoussé à un appendice la démonstration de cela. Mais cela renforce encore l'impression que tous les infinis se valent.

2.4 Les nombres réels sont plus infini !

La démonstration de Cantor paraissait légèrement "borderline" à l'époque, puisqu'il n'avait pas trouvé un seul nombre transcendant. Il avait simplement montré que $\mathbb{A}$ était énumérable (on dit dénombrable de nos jours) tandis que, et c'est là son deuxième coup de maître, $\mathbb{R}$ ne l'était pas. Donc, (i) non seulement les nombres transcendants n'étaient pas des exceptions, mais ils constituaient la (très très très grande) majorité ; (ii) oui, il existe des infinis plus grands que $\aleph_0$!

Cette démonstration est la clef de tout l'édifice et nous donne une méthode pour construire des infinis de plus en plus grands, nous allons donc y passer un peu de temps. Mais d'abord, qu'est ce que l'ensemble des nombres réels ? Il existe plusieurs façons de le construire. Par exmple, c'est l'ensemble qui contient la limite de toutes les suites convergentes de $\mathbb{Q}$[5]. Une autre façon, plus consructiviste, est de le définir comme l'ensemble de tout les nombres qui s'écrivent comme $a_0.a_1a_2a_3...$ où les a_i sont des nombres entiers entre 0 et 9. Cela veut dire que nous utilisons le développement en base 10 des nombres comme définition de $\mathbb{R}$ (qui contient donc tous les nombres comme 0.5 ou 3.1415926...).

Si vous vous souvenez encore de ce que nous avons dit sur le produit cartésien des ensembles, vous voyez que cette construction revient à identifier $\mathbb{R}$ au produit cartesient $\{0,1...,9\} \times \{0,1,...,9\} \times ....$

[4] Le lecteur a probablement entendu que cela a entrainé un meurtre chez les pythagoriciens.

[5] Par exemple, le nombre $1/e$ peut être défini comme la limite de la suite $S_N = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n/n!$. On peut d'ailleurs utiliser cette définition pour démontrer que $1/e$ n'est pas rationnel : il suffit pour cela d'utiliser l'évaluation du reste d'une série alternative tronquée.

($\aleph_0$ fois) et donc

$$card(\mathbb{R}) = 10^{\aleph_0}$$

Nous avions montré plus haut que $\aleph_0^{10} = \aleph_0$. Ici, nous essayons de quantifier un nombre qui a priori devrait être plus grand, même si nos précédentes tentatives nous ont rendu un peu sceptique.

La démonstration de Cantor de la non-dénombrabilité de $\mathbb{R}$ était basée sur l'absurde : supposons que les réels sont dénombrables et démontrons que cela mène à une contradiction. Allons y donc. Nous nous bornerons aux nombres réèls entre 0 et 1 et supposons que nous les avons dénombrés comme $r_0, r_1, r_2, \ldots$. Ecrivons leur développement décimal :

$$\begin{array}{rcl} r_0 & = & 0.a_0^0 a_1^0 a_2^0 \ldots \\ r_1 & = & 0.a_0^1 a_1^1 a_2^1 \ldots \\ r_2 & = & 0.a_0^2 a_1^2 a_2^2 \ldots \\ & \ldots & \end{array}$$

Nous construsions maintenant un nombre r comme suit : la première décimale de r est la première décimale de r_0 + 1 (modulo 10 : ainsi, si le premier décimal de r_0 est 9, le premier décimal de r est 0) ; la deuxième décimale de r est la deuxième décimale de $r_1 + 1$ et ainsi de suite : pour construire r, nous prenons les éléments diagonaux du tableau ci-dessus et nous les incrémentons de 1 :

$$r = 0.b_0 b_1 b_2 b_3 \ldots$$

où $b_i = (a_i^i + 1) \ (mod\, 10)$. Bon, maintenant, il est évident que $r \neq r_n \ \forall n$ puisque justement, la n-ième décimal de r et la n-ième décimale de r_n sont forcément différentes par construction ! Or, r est un nombre réel, puisque nous avons son développement décimal. Nous en déduisons que notre hypothèse de départ, la denombrabilité de $\mathbb{R}$ est fausse.

Revoyons notre démonstration : (i) nous supposons $\mathbb{R}$ dénombrable, c'est à dire que l'on peut lister *tous* les nombres réels dans une suite r_n (souvenez vous, c'est exactement ce que nous avons fait pour les nombres rationnels, où le nombre d'étapes servait d'indice pour le listing) ; (ii) nous construisons un nombre réél qui ne fait pas parti de cette liste : nous en déduisons que nous ne pouvions pas dénombrer $\mathbb{R}$. Et ainsi, nous avons notre premier infini plus grand que $\aleph_0$:

$$card(\mathbb{R}) > card(\mathbb{N}) = \aleph_0$$

Appelons $\aleph_1$ le cardinal de $\mathbb{R}$, le plus petit infini strictement plus grand que l'infini des nombres entiers. Peut-être l'avez vous remarqué, nous avons été un peu rapide ici : tout ce que nous avons démontré est que $\mathbb{R}$ est vraiment plus grand que $\mathbb{N}$, mais nous n'avons pas démontré qu'il n'existe pas d'infini entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. En réalité, Cantor a passé les dernières années de sa vie, entre deux séjours à l'hopital psychiatrique, à essayer de démontrer cette hypothèse qu'on appelle l'hypothèse du continu. Formulé plus exactement :

> Un sous ensemble de $\mathbb{R}$ est soit fini, soit dénombrable, soit de même cardinalité que $\mathbb{R}$.

On sait maintenant que cette hypothèse, appelé hypothèse du continu, est indécidable : Gödel et Cohen ont démontré, dans les années 1940, que cet hypothèse, ou son contraire, est compatible avec la théorie des ensembles. Malgrès sa démonstration d'indécidabilité, Cohen lui même pensait que l'hypothèse du continu est fausse ! L'ensemble $\mathbb{R}$ serait beaucoup trop grand pour qu'il n'y ait pas d'autre infini entre lui et $\mathbb{N}$. Nous conseillons au lecteur intéréssé de lire l'appendice sur l'infini des physiciens : parfois, le continu paraît trop riche pour notre humble monde physique. Et bien sûr, l'abus d'alcool ou de substance halucinogène est dangereux.

2.5 La hiérarchie des nombres transfinis.

Nous avons vu que multiplier un nombre transfini par 2 ou l'élever au carré ne le change pas. Par contre, 10 (ou 2 ou n'importe quel entier naturel) puissance un nombre transfini donne un nombre transfini plus grand et nous pouvons ainsi construire toute une suite de nombres transfinis : $\aleph_0$, $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}, \aleph_2 = 2^{\aleph_1}$, ... avec $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < ...$

Comme ensemble beaucoup plus grand que $\mathbb{R}$, on peut considérer par exemple l'ensemble de toutes les fonctions sur $\mathbb{R}$ qui valent 1 ou -1, c'est à dire l'ensemble de toutes les fonctions telles que $f(x) = 1$ ou -1, selon la valeur de x. Le cardinal de cet ensemble vaut $2^{\aleph_1}$. L'ensemble de toutes les fonctions sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{N}$ est de cardinal $\aleph_0^{\aleph_1}$. A votre avis, quelle est la relation entre ce nombre et $\aleph_3$?

L'ensemble de toutes les fonctions sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ est de cardinal $\aleph_1^{\aleph_1}$. Parfois, des conditions à priori anonymes réduisent sérieusement la taille d'un ensemble. Par exemple, un magnifique théorème d'analyse fonctionnelle affirme que l'ensemble de toutes les fonctions de carré sommable sur un intervalle fini n'est *que* de cardinal $\aleph_1^{\aleph_0}$.

Ce que nous avons fait là est de domestiquer certains infinis, à l'aide de méthodes *finies*. Rien ne nous empêche d'aller plus loin, et construire des nombres plus grands que tous les nombres transfinis $\aleph_i$, à l'exemple de ce que nous avons fait pour les entiers naturels. Et puis construire des nombres plus grands que tous ces derniers. Les infinis que l'on génère ainsi sont au delà de notre intuition, mais nous avons un moyen formel de les construire.

Un infini encore plus grand serait un infini tel qu'on ne puisse même pas imaginer une méthode pour le construire. C'est ce que Cantor appelait l'infini absolu. Comme un clin d'oeil aux philosphes du passé, Cantor croyait que cet infini absolu devait représenter dieu.

Nous allons arrêter ici notre tour des infinis de plus en plus grands. Mais résumons : Cantor a résolu la contradiction apparente sur la divisibilité des infinis et a compris qu'il existe toute une hiérarchie dans ce monde. Cela s'est fait à travers la formulation de la théorie des ensembles et la construction d'une méthode rigoureuse pour comparer la taille de deux infinis entre eux.

3 Gödel et le paradoxe du "je suis un menteur".

La théorie des ensembles était un outil magnifique non seulement pour quantifier les infinis, mais pour formuler toutes les mathématiques en termes abstraits et extrêmement rigoureux. Par exemple, Peano (vers 1890) a reformulé la théorie des nombres par la théorie des ensembles avec très peu d'axiomes de base. Sa construction très élégante est un modèle du genre pour la formulation de n'importe quelle théorie mathématique[6].

Bertrand Russel s'est cependant rendu compte que la théorie des ensembles, formulée très librement, posait des problèmes de self référençage. Considérons Ω, l'ensemble de tous les ensembles. Est ce que Ω appartient à lui même ? La question est troublante, puisqu'on a du mal à imaginer un ensemble qui appartiendrait à lui même. L'ensemble $A = \{a,b,c,A\}$ est un tel exemple ; on pourrait le réécrire $A = \{a,b,c,\{a,b,c,A\}\}$et on pourrait continuer ainsi à l'infini. Le concept n'est pas intuitif, mais maintenant que nous sommes habitués à manipuler des infinis, cela ne doit pas nous faire peur.

Russel a posé un paradoxe plus subtil : Considérons l'ensemble Γ de tous les ensembles *qui n'appartiennent pas à eux mêmes*. Est ce que $\Gamma \in \Gamma$? Si la réponse est non, alors Γa justement la propriété de ne pas appartenir à lui même, donc il doit appartenir à Γ. De la même façon, si la réponse est oui, alors la réponse est non. Aïe .... Vous voyez que ce n'est pas en inventant la théorie des ensembles que nous avons guéri l'infini du self-référençage. Le diable est dans le mot "l'ensemble de

[6] Voir, si vous êtes intéressé, le document intitulé "qu'est ce que les nombres" sur le même site.

tous les ensembles ...". C'est ce mot *"tous"* qui fait que Γ est un ensemble infini et qu'il souffre de self-référençage.

La théorie brute des ensembles est trop puissante ; il faut la restreindre et interdire les boucles. C'est justement un des problèmes qu'Hilbert a posé à la communauté mathématique : énoncer un nombre fini d'axiomes qui permettent de définir les mathématiques de façon *complète* et *consistente*.

Un système formel est complet si tous les théorèmes à l'intérieur de ce système sont démontrables. Dire que la théorie des nombres est complète veut dire qu'il est possible de décider en un nombre fini d'étapes si une affirmation sur les nombres est vraie ou fausse. Par exemple, l'affirmation "15 peut être factorisé en 2 facteurs premiers" peut être facilement vérifiée ; de même pour 14=7+3 (qui est faux, bien sûr). L'affirmation "tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers" a pour l'instant échappé à une démonstration (de sa verité ou fausseté), mais si on croit que la théorie des nombres est complète, on sait que cela est vérifiable. Par contre, si on pense que la théorie des nombres n'est pas complète, il est alors possible que cette affirmation (qu'on appelle conjecture de Goldbach) ne soit tout simplement pas démontrable. On dit alors qu'elle est indécidable.

Un système est consistent si il ne contient pas de contradiction. Les deux affirmations P et $\sim P$ (c'est à dire "non P") ne peuvent pas être vraies en même temps. Si en suivant certains axiomes, je démontre P et en suivant d'autres, je démontre $\sim P$, mon système est inconsistent. Par exemple, si je pouvais démontrer que 5+4=9 est vrai et que $5+4 \neq 9$ est également vrai, je dirais que la théorie des nombres est inconsistente.

Le théorème de Gödel démontre qu'on ne peut pas construire de systèmes formels[7] complets qui soit en même temps consistents. Cela a (avait ?) un côté frustrant pour les mathématiciens : on pensait aux mathématiques comme à un temple sacré où en faisant suffisamment d'efforts et en étant suffisamment ingénieux, on pouvait tout démontrer... eh bien non !

Le théorème de Gödel a suscité pas mal de mystifications. Sa signification pourtant est très simple : *si* un système est complet, *alors* il est beaucoup trop puissant, c'est à dire qu'on peut construire des phrases du genre "je suis un menteur" à l'intérieur. Si *je* suis un menteur, alors la phrase que je viens de prononcer, "je suis un menteur" est un mensonge, donc je ne *suis pas* un menteur, donc la phrase "je suis un menteur" est vrai, donc ... Le diable est dans le self-référençage[8].

La construction de Gödel n'est pas trop compliquée. Supposons d'abord que la théorie des nombres est complète. Au rique de me répéter, cela veut dire qu'il n'existe pas de proposition indécidable à l'intérieur. Je vais ensuite construire une phrase du genre "je suis un menteur". Puisque l'arithmétique est complète, cette phrase est soit vrai, soit fausse. Cela entraine l'inconsistence du système.

Gödel d'abord *code* les propositions comme des nombres. Cela pouvait paraître étrange à son époque, mais à l'heure de l'informatique cela est banal. L'ensemble du texte que vous venez de lire est contenu dans un fichier sur un disque dur ; c'est à dire que c'est une suite de 0 et de 1 ; vous pouvez voir cette suite comme un grand chiffre en notation binaire. En se donnant un codage quelconque, on peut donc représenter "5+4=9" par exemple par 3124563123129463123123123l2. La proposition "5+4$\neq$9" sera représentée par 3124563123120123123123123l2 et ainsi de suite.

Maintenant on voit que certains nombres représentent des propositions vraies. La première phrase ("5+4=9") est de ce genre. Je vais appeler ces nombres "théorémals". Il faut voir cela comme une propriété comme une autre : certains nombres sont premiers, d'autres pairs et d'autres théorèmals. Je peux ainsi affirmer que "312456312312946312312312312 est théorémal".

Le prochain étape est le début du self référençage. Exactement comme je peux coder l'affirmation "17 est premier" par un grand nombre, je peux coder "312456312312946312312312312 est théoré-

[7]englobant l'arithmétique, c'est à dire pratiquement tout.

[8]Ceci est juste une figure de style, pas une phrase tiré de la bible.

mal" par un autre grand nombre. Ce dernier peut être lui même théorémal !

Gödel a réussi à construire un nombre G qui code l'affirmation "G n'est pas théorémal". C'est à dire qu'il a réussi le self référençage, en prolongenant les étapes décrites plus haut. La construction est un peu longue et nous la reproduisons dans un appendice.

Voilà, nous sommes arrivés au bout de la démonstration : *Si* l'arithmétique est complète, *alors* G est soit théorémal, soit il ne l'est pas. Si il l'est, alors il ne l'est pas. Et si il ne l'est pas, alors il l'est ! Ce n'est rien d'autre que "je suis un menteur" construit dans la théorie des nombres.

Appendice 1 : l'infini des physiciens.

Les physiciens sont des gens pragmatiques. L'infini pour eux n'est souvent (toujours ?) qu'un infini potentiel, un moyen util du calcul dont on se débarasse à la fin. Parfois, les théories que nous avons élaboré donnent des résultats qui sont vraiment infinis. Dans ce cas, nous nous disons que quelque chose est manifestemment faux dans la théorie ou que nous sortons du cadre de la théorie qui n'était fait que pour une certaine echelle. On essaie alors de faire mieux.

Le rayonnement du corps noir et la naissance de la mécanique quantique.

L'exemple le plus fameux est probablement la naissance de la mécanique quantique. Les scientifiques voulaient appliquer à la fin du dix-neuvième siècle les résultats de la toute nouvelle physique statistique du sieur Boltzman à la théorie éléctromagnétique : connaissant la température d'un corps, quel est le spectre (la couleur) de la lumière qu'il emet ? Cela permettait par exemple de deviner la température du soleil en mesurant simplement son spectre. Le résultat tout à fait étrange auquel on aboutissait était qu'en faite, le corps contenait une quantité infinie d'énergie éléctromagnétique !

Une explication s'impose. La physique statistique affirme que si un corps peut avoir plusieurs états énergétiques, il occupe chacun de ces états avec une certaine probabilité, et plus l'enérgie d'un état est élevée, plus faible est la probabilité d'être dans cet état. Imaginez par exempe une bille dans un bol : il y a une probabilité forte pour qu'elle se trouve au fond du bol, est une probabilité faible qu'elle soit sur la paroi. Dans notre monde macroscopique, la différence d'energie entre se trouver au fond du bol et sur la paroi est très grande : la probabilité d'être sur la paroi est donc quasiment nulle (10^{-3200} est un nombre vraiment très petit). Mais dans le monde microscopique (à l'échelle des atomes, des molécules et même des cellules) , les différences d'énergie sont plus faible et ce genre de phénomènes est courant. C'est pour cela par exemple que les réactions chimiques ont lieu.

Revenons maintenant à notre corps rayonnant, qu'on appelle "corps noir" pour lui donner encore plus de cachet. Un corps peut emettre et recevoir des ondes electromagnétiques. Votre corps (oui oui, vous, le lecteur) par exemple est à 37 °C et emet essentiellement dans la gamme des infra-rouge. Les lunettes de visée nocturne sont sensible à ces emissions (mais pas notre oeil) et peuvent donc vous voir dans la nuit.

Pour appliquer les résultats de la physique statistique au rayonnement, on supposait qu'un corps pouvait emmettre une certaine longueur d'onde avec n'importe quelle intensité E. Bien sûr, plus l'intensité était forte, plus il y avait de l'energie dans l'onde et plus faible était la probabilité de l'emission. Et quand je dis "n'importe quelle intensité", je veux dire que la variable E est *continue* : la gamme des intensités disponibles était supposée être une infinité continue non dénombrable. Mais cela posait un grand problème : quand on considérait les longeurs d'onde de plus en plus courte, leurs probabilité d'emettre des ondes de forte intensité devenait de plus en plus grande ! Je ne rentre pas dans les détails, mais c'est évident que votre corps n'est pas en train d'emettre des rayons X avec l'intensité d'une étoile.

En 1900, Max Plank a émis une hypothèse incroyable : supposons que l'intensité possible E d'une onde n'est pas une variable continue, mais une variable *discrète* qui ne peut prendre que des valeurs du genre E_0, $2E_0$, $3E_0$,... La gamme des intensités disponibles n'est alors pas une infinie continue(comme $\mathbb{R}$), mais une infinie *dénombrable* (comme $\mathbb{N}$). Magiquement, tout rentrait dans l'ordre et tout les cacluls devenait raisonable. Non seulement votre corps cessait d'emettre comme une étoile à neutron, mais en plus les vérifications expérimentales montraient de façon supéfiante la "correctitude" de la nouvelle théorie. Cette nouvelle théorie s'appelle la mécanique quantique et est le fondement de la physique moderne : c'est à travers cette théorie que nous comprenons notre monde.

Que le monde qui nous entoure ne soit pas continu mais divisé en toute petite case était profondement choquant à l'époque, mais nous nous y sommes habitués. En faite, nous continuons encore de penser que l'espace et le temps sont des variables continues, mais qu'une quantité relié à l'énergie qu'on appelle *action* est dénombrable et varie de façon discrète, par paliers. La vrai nature du tissu de l'espace-temps nous échappe encore et constitue un des domaines de recherche active de nos jours.

L'atome d'hydrogène dans un univers infini est instable.

Considérons maintenant un atome d'hydrogène tout seul dans l'univers. Si l'on considère la taille de l'univers finie, alors l'atome d'hdrogène est stable. Si l'on considère au contraire que la taille de l'univers est infinie, alors non, l'atome d'hydrogène ne peut pas exister et il se ionise immédiatement ! Et quand je dis finie, je ne veux pas dire petit. L'univers peut avoir une taille de 20 millards d'année lumière ou 20000 millards, peut importe. Pour que l'atome d'hydrogène existe, il suffit que la taille de l'univers ne soit pas un vrai infini.

Là, il faut que l'on corse l'exposé. Ami lecteur, pour continuer, il vous faut connaître un minimum de physique statistique et de mécanique quantique.

La fonction de partition d'un système est donnée par

$$Z = \sum_n g_n e^{-\beta E_n} = e^{-\beta F}$$

$E_n$est l'énergie d'un état, $g_n$le nombre d'états qui ont la même énergie E_n, β l'inverse de la température. F est l'énergie libre du système, qui est une sorte de moyenne des énergies du système. Ce n'est pas une moyenne arithmétique ni géométrique, mais une sorte de moyenne log-exp.

Une des premières choses que l'on apprend en mécanique quantique est que les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont données par

$$E_n = -R/n^2 \tag{1}$$

et ont la multiplicité n^2. R est la constante de rydberg, et vaux environ 13 electron-volt. Il n'y a qu'à appliquer la formule ci-dessus :

$$Z_{\text{hydrgoen}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{\beta R/n^2}$$

Mais si vous regardez de plus près, vous voyez que cette somme est méchemment divergente, puisque pour n grand, l'exponentielle est de l'ordre de 1. La contribution de l'état fondamental est négligeablepar rapport à la contribution des états ionisés ($n \to \infty$). Aïe ... Cette fois, nous ne pouvons pas y échapper en inventant la mécanique quantique, on a déjà incorporé ses résultats.

Nous devons prendre en consideration la taille de la boite dans laquelle nous avons déposé notre atome. Aux états de grand n correspondent des orbites d'électron de plus en plus grands[9]. Quand la taille des orbites devient de l'ordre de la taille de la boite L, la formule (1) cesse d'être correct. Il faut alors utiliser les niveaux d'énergie d'un électron libre dans une boite de taille L, qui sont donné par

$$E_n = (\frac{h^2}{2mL^2})n^2$$

La fonction de partition de l'atome qui tient compte de la présence des murs de la boîte s'écrit approximativement

$$Z = \sum_{n=1}^{N_{max}} n^2 e^{\beta R/n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma n^2} = Z_1 + Z_2$$

où γ tient compte des divers facteurs numériques que nous avons introduit. La contribution du deuxième terme à la fonction de partition se calcule facilement et vaut $\sqrt{L/\Lambda}$, où $\Lambda = \beta h^2/2m \approx 10^{-14}m$ à la température de 1K.

Pour évaluer le deuxième terme, nous devons estimer N_{max}. L'orbite de l'état n est donné par $r_n = n^2 r_0$ où r_0 est la taille de l'atome d'hydrogène dans son état fondamental et vaut $5\,10^{-11}m$. Nous avons donc

$$N_{max} = \sqrt{L/r_0}$$

Bon, tout cela fait beaucoup de clacul, mais donnons nous maintenant quelques chiffres. Nous supposons que la taille de la boite est $L = 10^{27}m$ (environ 100 millard d'année lumière) et que nous somme à 1a température de 1K. La contribution des états libres à la fonction de partition vaut alors $Z_2 = 10^{20}$, ce qui paraît un grand chiffre. Mais la contribution de l'état fondamental $n = 1$ vaut $\exp(\beta R) \approx 10^{56000}$, qui est un chiffre vraiment très très grand ! La contribution du deuxième niveau $n = 2$ n'est que 10^{14000}, qui, bien que très grand, reste négligeable par rapport à la contribution du premier état. Même si on tenait compte de la contribution de tous les termes jusqu'à $N_{max} = 10^{20}$, nous ne dépasserions pas les 10^{15000}, qui reste toujours négligeable par rapport à la contribution du niveau fondamental.

Même si on imaginait notre univers 1000 millard de fois plus grand que ce que nous avons estimé, cela ne changera rien. Par contre, comme nous l'avons dit plus haut, si il était vraiment infini, notre atome d'hydrogène sera immédiatement ionisé !

Dans notre monde réél, chaque atome est entouré par de nombreux autres, qui constituent les limites du premier, et nous n'avons pas à considérer la taille de l'univers. Mais l'exercice ci-dessus laisse à réfléchir.

Appendice 2 : la denombrabilité des nombres algébriques.

Appendice 3 : l'Axiome du choix.

Cet axiome est au coeur de notre manipulation des infinis. Vous avez vu qu'avec des expressions du genre $\forall n$ on manipule (ou affirme) d'un seul coup (quelque chose sur) tous les nombres. C'est un moyen fini de manipuler des entités infinies. L'axiome du choix va encore plus loin et se libère du besoin de créer une méthode explicite pour manipuler les infinis. Voilà son énoncé :

[9] Il n'est pas très correct de parler d'orbite en mécanique quantique, et ce serait plus exact dans notre cas d'utiliser la distance moyenne au centre. Pour notre discussion, cela revient vraiment au même.

> Soit un ensemble A constitué lui même d'ensembles mutuellement disjoints. On peut construire un ensemble B qui contient exactement un élément de chacun de ces ensembles, c'est à dire qu'il existe une fonction qui choisit un élément de chacun de ces ensembles.

Voilà : l'axiome du choix affirme qu'une telle fonction existe toujours. Considérons par exemple un ensemble A de sous ensembles (mutuellement disjoints) de $\mathbb{N}$. La fonction f qui extrait le plus petit nombre d'un ensemble de nombres est une fonction de choix, et extrait de chaque élément de A un et un seul nombre. Non seulement nous avons démontré que cette fonction existe pour A, mais nous l'avons construit explicitement.

Comme deuxième exemple, considérons un ensemble B des intervalles (mutuellement disjoints) contenus dans $[0,1]$. A chaque élément de B, nous pouvons associer le nombre réel qui représente son milieu. Par exemple, à $[0.2,0.4] \in B$, nous associons le nombre 0.3. Vous voyez qu'à nouveau, nous avons construit explicitement une fonction de choix.

Considérons maintenant un ensemble de sous ensembles (mutuellement disjoints) de $\mathbb{R}$. Est ce qu'il existe une fonction qui choisit un élément de chaque sous ensemble ? Même si on ne sait pas, dans ce cas, construire explicitement cette fonction, l'axiome du choix affirme qu'elle existe.

Appendice 4. La construction de Gödel.

Appendice 5. Les infiniments petits.

Les infiniment petits étaient très utilisés au début de la création du calcul différentiel. Ce sont ces fameux nombres dx et dy qui sont supposés être plus petits que n'importe quel nombre réel, mais supérieur à 0 ! Ils posaient cependant le même genre de contradiction que les infiniment grands. Des mathématiciens comme Cauchy et Weierstrass ont purgé les mathématiques de ces objets. Une limite (comme par exemple $n \to \infty$) était perçue par les mathématiciens de la génération d'avant comme un mouvement. Ce n'est pas anodin si on utilise le mot *n tend* vers l'infini. Cauchy et Co. ont éliminé le concept du mouvement, en utilisant le formalisme des $\forall\eta,\exists\varepsilon$... qui embrassait tous les nombres d'un seul coup et libérait les mathématiques du besoin des infiniment petits.

Quand Cantor a quantifié les infiniment grands avec ces $\aleph$ (qui souvenez vous, sont plus grand que *tous* les nombes naturels) la question de l'existence des infiniments petits s'est posée à nouveau. En effet, que vaut $1/\aleph_0$? Les créateurs des infiniment grands étaient les plus fervents opposants aux infiniment petits. Un auteur remarquait que cela ressemble aux avocats de la légalisation des drogues douces, qui pour gagner en crédibilité, sont les plus fervents opposants aux drogues dures.

Ceci dit, il a fallu attendre les années 1960 pour que l'on puisse résoudre toutes les contradictions associées aux infiniment petits. Cela s'est fait par le mathématicien Abraham Robinson qui a inventé l'analyse non-standard et légalisé les infinitésimaux. Donc, oui, il existe des nombres ε tels que

$$0 < \varepsilon < r \quad \forall r \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Nous allons brièvement voir ici la construction de Robinson.

Exactement comme nous avons plongé l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ dans un ensemble plus riche $\mathbb{R}$, nous pouvons également plonger $\mathbb{R}$ dans un ensemble plus riche appelé l'ensemble des nombres hyper-rééls $\mathbb{H}$. Considérons en effet l'ensemble de toutes les suites dans $\mathbb{R}$. Ce sont des objets du genre $(r_0,r_1,r_2,...)$ et constituent justement l'ensemble des hyper-rééls[10]. On peut très facilement

[10] Bon, en réalité, on "réduit" un peu cet ensemble avec la relation d'équivalence suivante : si le nombre d'éléments pour lequel $a_n = b_n$ est un infini dénombrable, alors $(a_n) = (b_n)$.

définir les opérations arithmétiques dans $\mathbb{H}$ en effectuant ces mêmes opérations terme à terme sur la suite correspondante. On voit également que $\mathbb{R}$ est plongé dans $\mathbb{H}$, puisqu'à chaque nombre réél r on associe le nombre hyper-réél $h = (r, r, r, r, ...)$.

Point le plus important, il existe une relation d'ordre dans $\mathbb{H}$: on dit que $h_1 < h_2$ si, au delà d'un certain rang, (presque) tous les éléments de la suite de h_1 sont plus petits que les éléments correspondants dans la suite h_2. Par exemple, $\varepsilon = (1/n)$ (la suite $(1, 1/2, 1/3, ...)$) est plus grand que $\varepsilon^2 = (1/n^2)$.

Mais justement, ce nombre ε, si vous réfléchissez bien, avec les définitions que nous venons de donner, est plus petit que n'importe quel nombre réél et vérifie la relation (2) !

Bon, si c'était aussi simple, cela n'aurait pas pris autant de temps. En effet, il n'y a aucune raison qu'il y existe une relation d'ordre entre deux nombres h_i quelconques, les suites correspondantes peuvent être entrelacées. Mais si on accepte l'axiome du choix et avec quelques difficultés supplémentaires, on peut s'en sortir. Ce que nous ne démontrons pas ici.

Bilbiographie.

1. Infinity and the mind.
2. The mystery of the Aleph.
3. Gödel, Esher Bach, Hofstadter.
4. Lumière et matière, Feynman.
5. Leçon de géométrie élémentaire, Klein
6. Infini des philosophes, infini des mathématicien.
7. Feynman lectures in physics.
8. Figures de l'infini, Tony Levy.