Université Joseph Fourier
Ecole Doctorale de Physique

Actions mécaniques de la lumière. Principes et Applications

Jacques DEROUARD, Professeur
Mars 2009

Chapitre 2

Origine et intensité des forces radiatives

Nous allons dans ce chapitre présenter quelques éléments permettant d'évaluer ces forces dans les cas simples et donner quelques ordres de grandeur et paramètres importants. Nous terminerons par évoquer les méthodes utilisables dans le cas général, qui nécessitent de résoudre numériquement les équations de Maxwell, ce qui permet ensuite, connaissant la distribution du champ électromagnétique, d'en déduire les forces s'exerceant sur la particule.

2.1 Objet noir irradié par un faisceau laser localisé

Considérons un objet macroscopique "noir", c'est à dire absorbant parfaitement la totalité du rayonnement d'un faisceau laser de puissance P incident suivant la direction $\vec{u}_z$. Dans ce cas la force exercée par le faisceau s'écrit simplement :

$$\vec{F} = \frac{P}{h\nu}\hbar\vec{k} = \frac{P}{c}\vec{u}z \tag{2.1}$$

traduisant le fait que le force est le débit d'impulsion du faisceau, égal au débit de photon fois l'impulsion de chaque photon valant $\hbar\vec{k} = \hbar\omega/c\vec{u}z$.

Noter que la force correspondante "pression de radioation" est indépendante de la fréquence du rayonnement, elle ne dépend que de la puissance du faisceau, et vaut donc :

$$|\vec{F}| = 3,33.10^{-9}N/W$$

2.2 Objet noir irradié par un faisceau large

Considérons maintenant le cas où le même objet macroscopique est soumis à un rayonnement étendu, du type onde plane incidente suivant la direction $\vec{u}_z$, caractérisé par un éclairement I. Dans ce cas la "pression de radiation" sera déterminée par la puissance lumineuse interceptée et absorbée par l'objet, égale au produit $I.S$ ou σ est l'aire de l'ombre de la particule éclairée par le rayonnement.

$$\vec{F} = \frac{I.\sigma}{c}\vec{u}z \tag{2.2}$$

2.3 Objet quelconque éclairé par une onde plane

Dans le cas général le transfert d'impulsion entre le rayonnement et la particule résulte soit de processus d'absorption, comme précédemment, soit de processus de diffusion : dans ce dernier cas c'est le changement de direction du rayonnement qui crée le changement d'impulsion et donc la force.

Au processus d'absorption correspond comme dans le cas précédent une contribution à la force radiative du type :

$$\vec{F}_{abs} = \frac{I.\sigma_{abs}}{c}\vec{u}z$$

où σ_{abs} est la "section efficace" d'absorption, qui dépend des propriétés optiques de la particule, sa taille et sa forme. Pour une particule pas très grande devant la longueur d'onde σ_{abs} est très différent de S.

La force résultant du transfert de quantité de mouvement Δp lors du processus de diffusion s'écrit de manière similaire :

$$\vec{F}_{scat} = \frac{I.\sigma_p}{c}\vec{u}z$$

où la "section efficace de transfert de quantité de mouvement" σ_p s'exprime en fonction de la distribution de l'angle θ de déflexion caractérisée par la "section efficace différentielle" $d\sigma/d\Omega$:

$$\sigma_p = \int (1 - \cos\theta)\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega = [\int \frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega](1- < \cos\theta >)$$

Au total la force radiative s'écrit :

$$\vec{F} = \frac{I.(\sigma_{abs} + \sigma_p)}{c}\vec{u}z \tag{2.3}$$

Pour plus de généralité, on peut aussi introduire le vecteur de Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$, dont la valeur moyenne $< \vec{S} >= \Re e(\vec{E} \times \vec{H}^*)/2$ s'identifie au flux d'énergie de l'onde, c'est-à-dire à l'éclairement local, et écrire :

$$\vec{F} = (\sigma_{abs} + \sigma_p)\frac{< \vec{S} >}{c} \tag{2.4}$$

2.4 Force s'exerceant à l'interface entre le vide et un diélectrique

On revient maintenant à un objet macroscopique transparent, diélectrique caractérisé par un indice de réfraction n. Dans ce cas la force radiative exercée est une fonction compliquée de la forme de l'objet, de son orientation, et de la polarisation du rayonnement. En fait cette force peut se concevoir comme la résultante de forces localisées au passage de l'interface entre le diélectrique et le milieu extérieur liée au changement de la quantité de mouvement effective du rayonnement lors de son entrée dans le milieu [1].

Il est facile de montrer que si l'on admet que l'impulsion effective d'un photon associé à un rayonnement de vecteur d'onde $\vec{k}$ vaut $\hbar\vec{k}$ (où $|\vec{k}| = n\omega/c$, c étant la vitesse de la lumière dans le vide, alors la force s'éxerceant à l'interface est perpendiculaire à l'interface, et tend à tirer la matière constituant la particule à l'extérieur vers l'extérieur, en accord avec les expériences "d'étirement optique" réalisées par J. Guck et al.

Pour cela on écrit que la force exercée par un faisceau de puissance P associé à une onde $\vec{k}$ s'écrit :

$$\vec{F} = \frac{P}{h\nu}[\hbar\vec{k} - R_r\hbar\vec{k''} - R_t\hbar\vec{k'}] \tag{2.5}$$

où $\vec{k''}$ et $\vec{k'}$ désignent les vecteurs d'onde des ondes réflechie et transmise, avec les coefficient de réflexion et de transmission R_r et R_t (avec $R_r + R_t = 1$). Or d'après les lois de Descartes, il est immédiat de voir que les composantes des vecteurs d'onde suivant la direction parallèle à la surface sont égales. En projetant l'équation précédente suivant cette direction on en déduit que la composante de $\vec{F}$ suivant cette direction est nulle.

2.5 Force exercée par un champ électromagnétique sur une particule de petite taille

On considère donc une particule constituée d'un ensemble de charges q_l se déplaçant dans le vide autour d'une position moyenne $\vec{R}$, en interaction avec une champ électromagnétique $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$, $\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})$ périodique de fréquence $\nu = \omega/2\pi$ et de longueur d'onde $\lambda_0 = c/\nu$, de valeur moyenne nulle dans le temps. La force exercée par ce champ sur la charge s'écrit simplement :

$$\vec{\mathcal{F}}^{tot} = \sum_l q_l(\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}_l) + \dot{\vec{r}}_l \times \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}_l)) = \vec{\mathcal{F}}^{elec} + \vec{\mathcal{F}}^{magn} \tag{2.6}$$

[1] Notons que le problème de la quantité de mouvement du rayonnement dans un milieu diélectrique est un sujet controversé, et compliqué par le fait qu'une onde électromagnétique se propageant dans un milieu peut s'accompagner de la propagation d'une onde mécanique résultant de la déformation du milieu sous l'effet des forces exercées par le rayonnement sur la matière.

Le moment dipolaire de la particule est défini par :

$$\vec{\mathcal{D}} = \sum_l q_l(\vec{r}_l - \vec{R}) \tag{2.7}$$

Nous considérons le cas d'une "nanoparticule" de taille très petite devant λ, ce qui va nous autoriser à écrire ("aproximation dipolaire") :

$$\mathcal{E}_i(\vec{r}) \simeq \mathcal{E}_i(\vec{R}) + \sum_j \frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial r_j}.(r_j - R_j) \tag{2.8}$$

et

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) \simeq \vec{\mathcal{B}}(\vec{R}) \tag{2.9}$$

On va supposer également :

$$\dot{r}_l >> \dot{R} \tag{2.10}$$

2.5.1 Force radiative et moment dipolaire

Partie électrique de la force de Lorentz

Dans ces conditions la partie "électrique" de la force radiative (cf Eq.2.6) peut se réécrire

$$\mathcal{F}_i^{elec} = \sum_l q_l \mathcal{E}_i + \sum_j \frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial r_j}. \sum_l q(r_l j - R_j) = \sum_l q_l \mathcal{E}_i + \sum_j \frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial r_j}.\mathcal{D}_j \tag{2.11}$$

où les composantes du champ électrique sont celles du point $\vec{R}$. La valeur moyenne des champ dans le temps étant nulle, on peut réécrire l'expression précédente sous la forme :

$$< \mathcal{F}_i^{elec} >_T = < \sum_j \frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial r_j} \mathcal{D}_j >_T \tag{2.12}$$

où $<>_T$ désigne la moyenne dans le temps.

Partie magnétique de la force de Lorentz

Suivant l'approximation dipolaire Eq.2.9 pour le champ magnétique avec la condition 2.10 la partie magnétique de la force de Lorentz se développe :

$$\vec{\mathcal{F}}^{magn} = \sum_l q_l \dot{\vec{r}_l} \times \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}_l) \simeq \dot{\vec{\mathcal{D}}} \times \vec{\mathcal{B}}(\vec{R}) \tag{2.13}$$

Grâce à la relation entre le champ magnétique et le champ électrique, on peut exprimer $< \vec{\mathcal{F}}^{magn} >_T$, et donc $< \vec{\mathcal{F}}^{tot} >_T$ en fonction du seul champ électrique. En effet l'équation précédente 2.13 peut se réécrire :

$$\vec{\mathcal{F}}^{magn} = \frac{d(\vec{\mathcal{D}} \times \vec{\mathcal{B}})}{dt} - \vec{\mathcal{D}} \times \frac{d\vec{\mathcal{B}}}{dt} \tag{2.14}$$

La valeur moyenne dans le temps du premier terme vaut $(1/T).\vec{\mathcal{D}} \times \vec{\mathcal{B}}|_0^T$ et est donc nulle dans le cas où le champ et le moment dipolaire induit ou interagissant avec le champ sont périodiques.

Par ailleurs la condition 2.10 implique (cf C. Cohen-Tannoudji, cours Collège de France 1982, ch. 1) :

$$\frac{d\vec{\mathcal{B}}}{dt} \simeq \frac{\partial\vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \tag{2.15}$$

Suivant Maxwell :

$$\frac{\partial\vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}} \tag{2.16}$$

ce qui compte tenu de ce qui précède permet de réécrire l'Eq.2.14 :

$$< \vec{\mathcal{F}}^{magn} >_T \simeq < \vec{\mathcal{D}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}}) >_T \tag{2.17}$$

Moyenne dans le temps de la force de Lorentz

La force totale moyennée dans le temps, somme des parties magnétique et électrique s'écrit alors :

$$< \mathcal{F}_i^{tot} >_T = < \sum_j \frac{\partial\mathcal{E}_i}{\partial r_j}\mathcal{D}_j >_T + < (\vec{\mathcal{D}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}}))_i >_T \tag{2.18}$$

Avec l'identité vectorielle

$$(\vec{\mathcal{D}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}}))_i = \sum_j \mathcal{D}_j \frac{\partial\mathcal{E}_j}{\partial r_i} - \sum_j \mathcal{D}_j \frac{\partial\mathcal{E}_i}{\partial r_j} \tag{2.19}$$

l'expression 2.18 se réduit alors à

$$< \mathcal{F}_i^{tot} >_T = < \sum_j \mathcal{D}_j \frac{\partial\mathcal{E}_j}{\partial r_i} >_T \tag{2.20}$$

qu'on peut réecrire sous la forme

$$< \vec{\mathcal{F}}^{tot} >_T = < \vec{\nabla}(\vec{\mathcal{D}}.\vec{\mathcal{E}}) >_T = -\vec{\nabla}(< -\vec{\mathcal{D}}.\vec{\mathcal{E}} >_T) \tag{2.21}$$

où toutefois le gradient ne s'applique qu'au champ.

2.5.2 Force radiative et polarisabilité

Si la particule est assez petite alors le champ auquel la particule va être soumise est uniforme sur le volume de la particule, et celle-ci est caractérisée par un moment dipolaire $\vec{\mathcal{D}}$ proportionnel au champ,

$$\vec{\mathcal{D}} = \alpha\vec{\mathcal{E}} \tag{2.22}$$

où α est en général un tenseur. Si la particule est sphérique et constituée d'un matériau isotrope alors α est un nombre, ce qu'on supposera pour simplifier dans la suite. Utilisant la notation complexe, on fait apparaître les parties réelle et imaginaire de α :

$$\alpha = \alpha' + i\alpha" \tag{2.23}$$

Alors suivant l'Eq.2.20 la force appliquée à la particule s'écrit :

$$< \mathcal{F}_i^{tot} >_T = < \alpha \sum_j \mathcal{E}_j \frac{\partial \mathcal{E}_j}{\partial r_i} >_T = \frac{1}{2} \Re e(< \alpha \sum_j \mathcal{E}_j \frac{\partial \mathcal{E}_j^*}{\partial r_i} >_T \tag{2.24}$$

Ecrivons le champ sous la forme :

$$\mathcal{E}_i(\vec{r}, t) = \mathcal{E}_i^0(\vec{r}). \exp(-i\omega t). \exp(i\varphi(\vec{r})) \tag{2.25}$$

Alors :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_j^*}{\partial r_i} = (\frac{\partial \mathcal{E}_j^0}{\partial r_i} - i \frac{\partial \varphi}{\partial r_i}.\mathcal{E}_j^0). \exp(-i\omega t). \exp(i\varphi(\vec{r})) \tag{2.26}$$

et

$$< \mathcal{F}_i^{tot} >_T = \frac{1}{2} \sum_j [\Re e(\alpha.\mathcal{E}_i^0 \frac{\partial \mathcal{E}_j^0}{\partial r_i}) - \Re e(\alpha.i.\frac{\partial \varphi}{\partial r_i}.(\mathcal{E}_j^0)^2)] \tag{2.27}$$

En faisant apparaître les parties réelle et imaginaire de α (Eq.2.23) la force radiative s'écrit ainsi :

$$< \mathcal{F}_i^{tot} >_T = \frac{1}{4} \alpha'. \frac{\partial (\mathcal{E}_j^0)^2}{\partial r_i} + \frac{1}{2} \alpha".(\mathcal{E}_j^0)^2.\frac{\partial \varphi}{\partial r_i} \tag{2.28}$$

Cette expression trouve une interprétation physique simple dans le cas où l'amplitude du champ varie peu sur une distance de l'ordre de la longueur d'onde, distance caractéristique de variation de ϕ. Dans ces conditions, caractéristiques de la validité de "l'approximation iconale" (cf Born et Wolf, §3.1.1) on montre que la valeur moyenne de la densité d'énergie électrique est égale à celle de la densité d'énergie magnétique, égales à la moitié de celle duu champ électromagnétique $< U >$:

$$< U > = \epsilon_0. \frac{(\mathcal{E}^0)^2}{2} \tag{2.29}$$

tandis que la valeur moyenne du vecteur de Poynting s'exprime sous la forme :

$$< \vec{S} > = < U > c \frac{\vec{\nabla} \phi}{k} \tag{2.30}$$

de telle sorte que la force exercée sur la particule se met finalement sous la forme :

$$< \vec{\mathcal{F}}^{tot} >_T = \frac{1}{\epsilon_0}[\frac{1}{2}\Re e(\alpha).\vec{\nabla} < U > + \Im m(\alpha) k \frac{< \vec{S} >}{c}] \tag{2.31}$$

Ainsi cette force radiative se décompose en 2 parties, la "force de gradient" reliée à la partie réelle de la polarisabilité :

$$\vec{\mathcal{F}}_{grad} = \frac{1}{\epsilon_0}[\frac{1}{2}\Re e(\alpha).\vec{\nabla} < U >] \tag{2.32}$$

et la "force de diffusion" reliée à la partie imaginaire de la polarisablité :

$$\vec{\mathcal{F}}_{scat} = \frac{1}{\epsilon_0}[\frac{1}{2}\Im m(\alpha) k \frac{< \vec{S} >}{c}] \tag{2.33}$$

Pour illustrer tout ceci on peut considérer les deux cas limites simples :

- Onde plane progressive de vecteur d'onde $\vec{k}$. Alors $\mathcal{E}_i^0$ est une constante et [2] :
$$\mathcal{E}_i(\vec{r}, t) = \mathcal{E}_i^0 . \exp(-i\omega t). \exp(i.(\vec{k}.\vec{r} + \varphi_0))$$
Dans ce cas seule subsiste la force de diffusion, proportionnelle à l'intensité du champ, que l'on peut identifier à la "pression de radiation".
- onde plane stationnaire, superposition de deux ondes planes progressives de directions opposées $\vec{k}$ et $-\vec{k}$. Alors φ est une constante et :
$$\mathcal{E}_i(\vec{r}, t) = \mathcal{E}_i^0 . \sin(\vec{k}.\vec{r} + \varphi_0). \exp(-i\omega t)$$
Dans ce cas la "pression de radiation" est nulle, ce qui s'interprète comme dû au fait que l'onde est la somme de deux ondes progressive d'intensités égales et de direction de propagation opposées dont les forces de pression de radiation se compensent. Il subsiste la "force de gradient", qui tend donc suivant le signe de α' à attirer ou repousser la particule vers les ventres d'intensité de l'onde.

2.5.3 Polarisabilité d'une particule diélectrique

Il est bien connu qu'une particule sphérique diélectrique de rayon a et de volume v constituée d'un matériau homogène isotrope caractérisé par une permittivité diélectrique ϵ_r, immergée dans un champ statique de valeur $\vec{\mathcal{E}_0}$ se polarise avec une densité de moment dipolaire uniforme $\vec{P}$ (Le champ à l'intérieur de la sphère est uniforme et vaut $-\vec{P}/(3\epsilon_0) + \vec{\mathcal{E}_0}$). Compte tenu des relations entre susceptibilité χ, permittivité ϵ_r et indice de réfraction n,

$$\chi = \epsilon_r - 1 = n^2 - 1$$

[2]Noter que φ_0 et $\mathcal{E}_i^0$ peuvent dépendre de la coordonnée i dans le cas d'une onde polarisée elliptiquement

il est facile de montrer que le moment dipolaire $\vec{\mathcal{D}} = \vec{P}.v$ de la particule plongée dans le champ $\vec{\mathcal{E}_0}$ s'écrit :

$$\vec{\mathcal{D}} = \frac{4}{3}.\pi.a^3.\frac{3\epsilon_0(n^2-1)}{(n^2+2)} \tag{2.34}$$

correspondant à une polarisabilité statique

$$\alpha^0 = 4\pi\epsilon_0\frac{(n^2-1)}{(n^2+2)}.a^3 \tag{2.35}$$

Cette polarisabilité est purement réelle, de telle sorte qu'on s'attendrait à ce qu'une telle particule ne soit soumise qu'à la force de gradient. En réalité pour calculer la force s'exerçant sur la particule par le champ électromagnétique il faut considérer la polarisabilité à la fréquence ω, qui s'exprime sous la forme (cf Appendice B et Jackson chapitre 16) :

$$\alpha(\omega) = \frac{\alpha^0}{(1 - i.\frac{2}{3}.\frac{k^3.\alpha^0}{4\pi\epsilon_0})} \tag{2.36}$$

où $k = \omega/c$. Ce qui donne :

$$\alpha'(\omega) \simeq \alpha^0 \tag{2.37}$$

et

$$\alpha"(\omega) \simeq \frac{2}{3}.\frac{k^3.(\alpha^0)^2}{4\pi\epsilon_0} \tag{2.38}$$

Cette partie imaginaire n'est pas liée ici à l'atténuation de l'énergie lumineuse incidente par absorption d'énergie par la particule diélectrique, qui dans le cas présent est transparente, mais à la diffusion du rayonnement.

2.5.4 Polarisabilité et sections efficaces

La partie imaginaire de α peut être simplement reliée à la puissance fournie par le champ électromagnétique à la particule, et par conséquent extraite du champ. Elle est proportionnelle à la section efficace totale d'interaction du champ avec la particule. Pour le voir, observons que la puissance fournie par le champ électromagnétique à une charge q est donnée par la formule :

$$\frac{dW}{dt} = \vec{\mathcal{F}}.\dot{\vec{r}} = q(\vec{\mathcal{E}} + \dot{\vec{r}} \times \vec{\mathcal{B}}).\dot{\vec{r}} \simeq \vec{\mathcal{E}}.\dot{\vec{\mathcal{D}}}$$

Pour une particule de polarisabilité α l'expression de la puissance moyenne fournie vaut :

$$< \frac{dW}{dt} >_T = < \vec{\mathcal{E}}.\alpha\dot{\vec{\mathcal{E}}} >_T = \frac{1}{2}\Re e(\alpha\dot{\vec{\mathcal{E}}}.\vec{\mathcal{E}}^*)$$

soit

$$< \frac{dW}{dt} >_T = \frac{1}{2}\Re e(\alpha(-i\omega\vec{\mathcal{E}}).\vec{\mathcal{E}}^*) = \frac{1}{2}\Re e((\alpha'+i\alpha").(-i\omega(\mathcal{E}^0)^2)) = \frac{1}{2}\alpha".\omega.(\mathcal{E}^0)^2$$

Ainsi cette puissance s'exprime sous la forme :

$$< \frac{dW}{dt} >_T = \frac{1}{2}\alpha".\omega.(\mathcal{E}^0)^2 \tag{2.39}$$

Considérons une onde plane progressive d'amplitude $\mathcal{E}^0$, correspondant à un flux d'énergie $\Phi = \epsilon_0 \frac{(\mathcal{E}^0)^2}{2} c$. La section efficace totale σ^{tot} d'interaction du champ avec la particule est définie comme le rapport entre la puissance extraite du champ et le flux incident. Ainsi :

$$\sigma^{tot} = \frac{< dW/dt >_T}{\Phi} = \frac{1}{2}\alpha".\omega.(\mathcal{E}^0)^2/(\epsilon_0\frac{(\mathcal{E}^0)^2}{2}c)$$

de telle sorte que

$$\sigma^{tot} = \frac{c}{\epsilon_0 \omega}\alpha" \tag{2.40}$$

Cette section efficace totale d'interaction du rayonnement avec la particule est la somme de 2 contributions, la section efficace d'absorption et la section efficace de diffusion :

$$\sigma^{tot} = \sigma^{abs} + \sigma^{scat} \tag{2.41}$$

où suivant la théorie de Mie (cf Yguerabide, 1998)

$$\sigma^{abs} = 4\pi.k.a^3.\Im m(\frac{n^2-1}{n^2+2}) \tag{2.42}$$

et

$$\sigma^{scat} = \frac{2}{3}.4\pi.k^4.a^6.|\frac{n^2-1}{n^2+2}|^2 \tag{2.43}$$

On notera que ces expressions sont cohérentes avec celles données pour α dans le paragraphe précédent (Eqs.2.35,2.36 et 2.40) dans les deux cas limites où $\sigma^{scat} >> \sigma^{abs}$ ou $\sigma^{scat} << \sigma^{abs}$. Elle permettent d'exprimer la pression de radiation sous la forme :

$$\vec{\mathcal{F}}_{scat} = \sigma^{tot}\frac{< \vec{S} >}{c} \tag{2.44}$$

Dans le cas d'une onde plane progressive il est assez immédiat de voir que la pression de radiation est dirigée suivant la direction de propagation de l'onde et que son intensité correspond à une impulsion de module $\hbar k = \hbar\omega/c$ par photon d'énergie $\hbar\omega$ absorbé.

2.5.5 Cas d'une petite particule immergée dans un milieu d'indice n_m

Dans tout ce qui précède nous avons supposé la particule dans le vide. Dans le cas où la particule d'indice n est immergée dans un milieu d'indice n_m

en présence de rayonnement caractérisé par une intensité $I = \epsilon_0 \frac{(\mathcal{E}^0)^2}{2}.n_m.c$ et une phase $\varphi(\vec{r})$ on peut montrer que l'expression de la force de pression de radiation devient :

$$\vec{\mathcal{F}}_{scat} = [\frac{4\pi.n_m}{c}(2k_m^3.a^3|\frac{n^2 - n_m^2}{n^2 + 2n_m^2}|^2 + \Im m(\frac{n^2 - n_m^2}{n^2 + 2n_m^2})]a^3.I.\vec{\nabla}\varphi \qquad (2.45)$$

et pour la force de gradient :

$$\vec{\mathcal{F}}_{grad} = [\frac{2\pi.n_m}{c}.\Re e(\frac{n^2 - n_m^2}{n^2 + 2n_m^2}).a^3.\vec{\nabla}I] \qquad (2.46)$$

où $k_m = k.n_m$ est le nombre d'onde du rayonnement dans le milieu. Ainsi dans un milieu d'indice n_m il suffit dans le formules établies dans le vide de remplacer l'indice n de la particule par l'indice relatif n/n_m, la vitesse de la lumière c par c/n_m et le nombre d'onde k par $k.n_m$.

Il est intéressant de remarquer que l'expression de la section efficace d'absorption de la particule immergée devient (cf Yguerabide 1998) :

$$\sigma_m^{abs} = 4\pi.k_m.a^3.\Im m(\frac{n^2 - n_m^2}{n^2 + 2n_m^2}) \qquad (2.47)$$

où $k_m = k.n_m$, tandis que l'expression de la section efficace de diffusion devient (cf Yguerabide 1998) :

$$\sigma_m^{scat} = \frac{2}{3}.4\pi.k_m^4.a^6.|\frac{n^2 - n_m^2}{n^2 + 2n_m^2}|^2 \qquad (2.48)$$

de telle sorte que la force de pression de radiation peut encore s'écrire sous la forme :

$$\vec{\mathcal{F}}_{scat} = \frac{\sigma_m^{tot}}{k_m c_m} I.\vec{\nabla}\varphi \qquad (2.49)$$

où $c_m = c/n_m$. Tout se passe alors comme si chaque photon absorbé communiquait à la particule une impulsion $\hbar k.n_m$.

2.5.6 Conclusions

On remarque :

- Les forces sont proportionnelles à l'intensité I.
- La dépendance en fonction du contraste $n^2 - n_m^2$ entre l'indice au carré de la particule et celui du milieu ambiant. Cela a 2 conséquences :
  - 1. les forces sont d'autant plus grandes que le contraste d'indice est fort.
  - 2. la force de gradient change de signe suivant que la particule a un indice plus grand ou plus petit que le milieu ambiant : Si la particule a un indice plus petit que le milieu ambiant elle est expulsée des régions de forte intensité lumineuse.

- La dépendance en fonction de la taille de la particule :
  - 1. proportionnelle à a^3, soit au volume, pour la force de gradient et la force de diffusion liée à l'absorption.
  - 2. proportionnelle à a^6 pour la force de diffusion liée à la diffusion élastique. Cette force augmente donc très vite avec la taille de la particule et, réciproquement, ... diminue de même.
- Dans le cas de particules métalliques l'indice est complexe et souvent grand, et il en résulte que les forces sont en général plus grandes que dans le cas de particules diélectriques. n en général dépend assez fortement de λ de telle sorte que suivant sa valeur on peut avoir la force de gradient qui change de signe.
- Pour finir il faut remarquer aussi que la théorie exposée ici suppose que les particules sont petites devant la longueur d'onde, de telle sorte que le champ puisse être considéré comme pratiquement uniforme à l'intérieur de la particule. Pour des particules métalliques cela implique que la taille de la particule doit être petite devant l'épaisseur de peau (une vingtaine de nm pour l'or dans la gamme visible - proche infrarouge).

2.6 Calcul des forces radiatives dans le cas général : formalisme du tenseur de Maxwell

2.6.1 Tenseur de Maxwell et forces électromagnétiques

Dans le cas général les forces s'exerçeant sur une particule en présence d'un champ électromagnétique peuvent s'exprimer en fonction de la distribution du champ électromagnétique :

$$\vec{F} = \int_V (\rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) d^3r \tag{2.50}$$

où ρ et $\vec{J}$ désignent les densités de charge et de courant présentes dans la particule située dans le volume V.

En exprimant charge et courant en fonction des champs au moyen des équations de Maxwell on peut montrer (cf Jackson ch. 6) que :

$$[\vec{F} + \int_V \frac{1}{c^2}\frac{1}{\mu_0}\frac{d(\vec{E} \times \vec{B})}{dt} d^3r]_i = \int_V \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} d^3r \tag{2.51}$$

où l'indice i désigne la composante du vecteur du membre de gauche cependant que T_{ij} est l'élément d'indices ij d'un tenseur d'ordre 2 :

$$T_{ij} = \epsilon_0[E_iE_j - \frac{1}{2}|\vec{E}|^2\delta_{ij}] + \frac{1}{\mu_0}[B_iB_j - \frac{1}{2}|\vec{B}|^2\delta_{ij}] \tag{2.52}$$

δ_{ij} étant le symbole de Kronecker.

Le deuxième terme du membre de gauche de l'équation 2.51 peut s'interpréter comme la dérivée par rapport au temps de la densité volumique d'impulsion du champ électromagnétique, égale à $(1/c^2)\vec{S}$ où $\vec{S} = (1/\mu_0)\vec{E} \times \vec{B}$ est le vecteur de Poynting (Le vecteur de Poynting représente un flux d'énergie, égal à un flux d'impulsion fois c puisque l'impulsion d'un photon est égal à son énergie divisée par c, et un flux est égal à une densité fois la vitesse de propagation). Si l'on a affaire à un champ électromagnétique périodique établi dont l'amplitude varie peu au cours du temps, la moyenne dans le temps de la dérivée du vecteur de Poynting est nulle, ce qui s'interprète comme le fait que l'impulsion du champ est constante dans le temps. On est ainsi conduit à écrire que :

$$[< \vec{F} >]_i = \int_V \sum_j \frac{\partial < T_{ij} >}{\partial x_j} d^3r \tag{2.53}$$

Un point intéressant est que l'intégrale de volume peut se transformer en une intégrale sur la surface entourant le volume V (cf théorème de Green pour des vecteurs) :

$$[< \vec{F} >]_i = \int_S \sum_j < T_{ij} > .N_j d^2r \tag{2.54}$$

où N_j désigne la composante suivant j de la normale $\vec{N}$ à la surface au point courant.

Ainsi :

- La résultante des forces s'exerçeant sur un objet s'exprime en fonction de la distribution du champ électromagnétique sur une surface *quelconque* entourant l'objet en question
- Il faut noter que ce champ est la somme du champ incident appliqué par l'opérateur et de la réaction de la matière à ce champ. Le calcul de la force nécessite donc de résoudre les équations de Maxwell en se donnant comme conditions aux limites le champ appliqué d'une part et les caractéristiques optiques de l'objet à distance finie. Ceci peut être réalisé en pratique au moyen de codes de calcul type éléments finis

Généralisation aux champs moyens dans les milieux matériels

L'expression 2.52 s'exprime en fonction des champs phénoménologiques moyens des milieux matériels polarisables sous la forme :

$$T_{ij} = [E_i D_j - \frac{1}{2}\vec{E}.\vec{D}\delta_{ij}] + [B_i H_j - \frac{1}{2}\vec{B}.\vec{H}\delta_{ij}] \tag{2.55}$$

ce qui permet de calculer de la même façon grâce à l'Eq. 2.54 la force s'exreçeant sur une particule immergée dans un milieu matériel qui n'est pas le vide.

Densité de force et tenseur de Maxwell

L'équation 2.53 suggère que la quantité sous l'intégrale du membre de droite est une densité volumique de force :

$$f_i = \sum_j \frac{\partial < T_{ij} >}{\partial x_j} \tag{2.56}$$

On peut montrer après quelques calculs laborieux sur l'expression 2.55 que l'Eq.2.56 peut se réécrire :

$$f_i = \rho_l \vec{E} + \vec{J_l} - \frac{1}{2}|\vec{E}|^2 \vec{\nabla} \epsilon - \frac{1}{2}|\vec{H}|^2 \vec{\nabla} \mu \tag{2.57}$$

où ρ_l et $\vec{J_l}$ sont les densités de charge et de courant libres.

Dans un milieu diélectrique ces charges et courants libres sont nuls, ce qui montre que la densité de force est localisée sur les interfaces entre milieux, et que cette force surfacique est normale au dioptre, en accord avec les considérations macroscopiques développées dans le §2.4. Cette force surfacique dans ce cas s'identifie avec le flux du tenseur de Maxwell sur l'interface.

Noter que pour une particule métallique plongée dans un milieu diélectrique le champ électromagnétique est nul à une profondeur de peau. Là encore la force s'appliquant à la particule est localisée au voisinage de l'interface, mais comprend une partie volumique où la contribution des charges libres est essentielle. Dans ces conditions il n'y a aucune raison pour que la force à la surface soit perpendiculaire à l'interface.

Annexe A

Force de réaction radiative et partie imaginaire de la polarisabilité

On considère une particule diélectrique. En présence d'un champ électrique statique $\mathcal{E}$ elle acquiert un dipôle $\mathcal{D} = \alpha^0\mathcal{E}$. En présence d'un champ incident oscillant à la fréquence angulaire ω avec l'amplitude $\mathcal{E}_{\prime}$:

$$\mathcal{E}_{inc}(t) = |\mathcal{E}_0| \exp(-i\omega t)$$

elle acquiert un dipôle également oscillant également à la même fréquence :

$$\mathcal{D}(t) = |\mathcal{D}_0| \exp(-i\omega t) \exp(i\phi)$$

où $\mathcal{D}$ est relié à $\mathcal{E}_{inc}$ via :

$$\mathcal{D} = \alpha\mathcal{E}_{inc}$$

La polarisabilité α peut être différente de la valeur α^0 observée en statique. Cela est évident dans le cas des matériaux dont la susceptibilité dépend de la fréquence. Mais même pour les diélectriques parfaits sans pertes, la polarisabilité comprend une partie imaginaire qui traduit le fait que de l'énergie est rayonnée et amortit le dipôle. On cherche à trouver la relation entre α et α^0 résultant de la correction apportée par cet amortissement radiatif.

Pour cela on écrit l'expression bien connue de la puissance rayonnée par le dipôle oscillant :

$$P_{rad} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} . \frac{\omega^4}{3c^3} |\mathcal{D}_0|^2$$

Cette quantité peut s'identifier au signe près à la puissance moyenne $< P_{rrad} >$ développée par une "force de réaction radiative" appliquée au dipôle, et qu'on peut associer à un champ électrique $\mathcal{E}_{rrad}$ en quadrature de phase avec le dipôle :

$$\mathcal{E}_{rrad} = i|\mathcal{E}^0_{rrad}|\exp(-i\omega t)\exp(i\phi)$$

de telle sorte que :

$$P_{rrad} = \mathcal{E}_{rrad}.\frac{d\mathcal{D}}{dt}$$

$$< P_{rrad} >= \frac{1}{2}\Re e[\mathcal{E}^*_{rrad}.(\frac{d\mathcal{D}}{dt})] = \frac{1}{2}\Re e[(-i|\mathcal{E}^0_{rrad}|).(-i\omega\mathcal{D})]$$

soit :

$$< P_{rrad} >= -\frac{1}{2}\omega|\mathcal{E}^0_{rrad}|.|\mathcal{D}_0|$$

En égalant P_{rad} et $< P_{rrad} >$ on tire :

$$|\mathcal{E}^0_{rrad}| = \frac{2}{4\pi\epsilon_0}.\frac{\omega^3}{3c^3}.|\mathcal{D}_0|$$

et donc, en comparant les expressions précédentes de $\mathcal{E}_{rrad}$ et de $\mathcal{D}(t)$ on doit avoir :

$$\mathcal{E}_{rrad} = i.\frac{2}{4\pi\epsilon_0}.\frac{\omega^3}{3c^3}.\mathcal{D}$$

L'astuce consiste à écrire que s'il n'y avait pas $\mathcal{E}_{rrad}$ on aurait simplement $\mathcal{D} = \alpha^0\mathcal{E}_{inc}$, mais qu'à cause de $\mathcal{E}_{rrad}$ on a en fait :

$$\mathcal{D} = \alpha^0\mathcal{E}_{inc} + \alpha^0\mathcal{E}_{rrad}$$

et toujours :

$$\mathcal{D} = \alpha\mathcal{E}_{inc}$$

Ainsi on a :

$$\alpha\mathcal{E}_{inc} = \alpha^0\mathcal{E}_{inc} + \alpha^0.i.\frac{2}{4\pi\epsilon_0}.\frac{\omega^3}{3c^3}.\mathcal{D}$$

soit :

$$\alpha\mathcal{E}_{inc} = \alpha^0\mathcal{E}_{inc} + \alpha^0.i.\frac{2}{4\pi\epsilon_0}.\frac{\omega^3}{3c^3}.\alpha\mathcal{E}_{inc}$$

d'où finalement :

$$\alpha = \frac{\alpha^0}{1 - i.\alpha^0.\frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{2k^3}{3}}$$

avec $k = \omega/c$.